Die

Krümmungs-Halbmesser

der

Kegelschnitte.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei der

hochlöblichen philosophischen Facultät zu Marburg.

Eingereicht von

Paul Riemann

aus Wetzlar.

MARBURG.
Druck von C. L. Pfeil.
1881.

Herrn

Professor C. A. von Drach

in

dankbarer Ergebenheit

gewidmet.

Die Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte sind schon seit langer Zeit der Gegenstand mannigfacher Untersuchungen gewesen, sowohl solcher, welche sich auf die betreffenden Lehren der analytischen Geometrie und die Anwendungen der Differentialrechnung stützen, wie auch solcher, die rein geometrisch zu Werke gehen, und man kennt als Resultate derselben eine grosse Anzahl von eigenthümlichen Relationen zwischen ihnen und den sonstigen Elementen der Curve.

Nachstehende auf Veranlassung meines hochverehrten Lehrers, Herrn Prof. v. Drach unternommene Arbeit beschäftigt sich zunächst mit bisher noch nicht beachteten einfachen Beziehungen, in welchen bei Sehnen- resp. Tangentendreiecken eines Kegelschnitts der Radius des umbeschriebenen Kreises zu gewissen durch das Dreieck bestimmten Krümmungsradien steht, uud leitet dann aus den hierbei gewonnenen Formeln in einfacher Weise die wichtigsten der vorher erwähnten Ausdrücke für den Krümmungshalbmesser, seine Beziehungen zu Tangenten, Normalen u. s. w. her.

Vorausgesetzt wird für das Nachfolgende die Kenntniss der nachstehenden Formeln aus der Theorie der Kegelschnitte, für deren Beweis und Herleitung auf Salmon-Friedler's analytische Geometrie der Kegelschnitte verwiesen wird, auf welche sich auch die übrigen im Verlauf der Untersuchung vorkommenden Citate beziehen:

$$\varrho = \frac{p'}{2\sin\vartheta} = \frac{p}{2\sin^3\vartheta} \text{ (S—F. Art. 253 u. 220)}$$

$$\varrho = \frac{b'^3}{ab} \text{ (S—F. Art. 250),}$$

worin p den Hauptparameter, p' den Parameter des durch den betrachteten Punkt gehenden Durchmessers, ϑ den Winkel der Tangente mit der Hauptaxe, b' den Halbmesser des Punktes, welcher dem betrachteten conjugirt ist, und a und b die Halbaxen bedeuten.

I.

Um den Radius des Kreises zu finden, welcher einem Sehnendreieck einer Parabel umbeschrieben ist, gehen wir aus von der bekannten Formel für den Radius des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises

$$R = \frac{abc}{4I},$$

worin a, b, c die Längen der Seiten des Dreiecks bedeuten und I seinen Inhalt bezeichnet. Der Inhalt Δ_S des einer durch die Gleichung $y^2 = px$ zwischen rechtwinkligen Coordinaten gegebenen Parabel eingezeichneten Dreiecks wird gefunden, wenn man in die allgemeine Formel für die durch die Coordinaten der Ecken ausgedrückte Dreiecksfläche

$$2\Delta = y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)$$

die aus der Parabelgleichung sich ergebenden Coordinaten der Ecken

$$x_1 = \frac{y_1^2}{p},\ y_1;\ x_2 = \frac{y_2^2}{p},\ y_2;\ x_3 = \frac{y_3^2}{p},\ y_3;$$

einsetzt. Man erhält dann

$$\Delta_S = \frac{1}{2p}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1).$$

Der Radius R des dem Sehnendreieck umbeschriebenen Kreises ist demnach zunächst

$$R = \frac{p\,a\,b\,c}{2\,(y_1-y_2)\,(y_2-y_3)\,y_3-y_1)}$$

und sind darin noch a, b, c passend auszudrücken. Bezeichnet man die Winkel, welche die Sehnen a, b, c mit der Hauptaxe bilden, mit χ_1, χ_2, χ_3, so ist sofort klar, dass $\frac{y_1-y_2}{a} = \sin\chi_1, \frac{y_2-y_3}{b} = \sin\chi_2, \frac{y_3-y_1}{c} = \sin\chi_3$ ist, und durch die Substitution dieser Werthe verwandelt sich der vorige Ausdruck in

$$R = \frac{p}{2\sin\chi_1 \cdot \sin\chi_2 \cdot \sin\chi_3}$$

und lässt sich derselbe nun leicht mit gewissen Krümmungshalbmessern in Beziehung setzen. Bekanntlich bildet die Tangente im Endpunkte eines Durchmessers, welcher eine Parabelsehne halbirt, mit der Axe denselben Winkel, wie die Sehne, d. h. sie ist der Sehne parallel. Bezeichnen wir also die drei Punkte der Parabel, worin die zu den Halbirungspunkten der Seiten unseres Dreiecks gehörigen Durchmesser die Curve schneiden, mit $x_{12}\,y_{12}, x_{23}\,y_{23}, x_{31}\,y_{31}$ und die Krümmungshalbmesser in diesen Punkten mit $\varrho_{12}, \varrho_{23}, \varrho_{31}$, so sind die Werthe der letzteren nach den im Eingang erwähnten Formeln

$$\varrho_{12} = \frac{p}{2\sin^3\chi_1}, \quad \varrho_{23} = \frac{p}{2\sin^3\chi_2}, \quad \varrho_{31} = \frac{p}{2\sin^3\chi_3},$$

sodass die Substitution in unsere obige Formel für R sofort liefert

$$\text{(I.)} \quad R^3 = \varrho_{12}\,\varrho_{23}\,\varrho_{31} \text{ d. h.}$$

„Der Kubus des Radius des einem Sehnendreieck einer Parabel umbeschriebenen Kreises ist gleich dem Produkt der drei Krümmungshalbmesser in den Scheiteln der drei Durchmesser der Parabel, welche durch die Halbirungspunkte der Seiten des Dreiecks zu ziehen sind."

Auch der Radius des Kreises, welcher einem Tangentendreieck der Parabel umbeschrieben ist, lässt sich in ähnlicher Weise durch gewisse Krümmungshalbmesser aus-

drücken. Für die Coordinaten der Ecken dieses Dreiecks erhält man aus den Gleichungen der Tangenten in $x_1 y_1$; $x_2 y_2$; $x_3 y_3$ folgende Werthe:

$$X_1 = \frac{y_1 y_2}{p}, \quad Y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

$$X_2 = \frac{y_2 y_3}{p}, \quad Y_2 = \frac{y_2 + y_3}{2},$$

$$X_3 = \frac{y_3 y_1}{p}, \quad Y_3 = \frac{y_3 + y_1}{2},$$

die zunächst für die Längen a', b', c' der drei Seiten des von den Tangenten gebildeten Dreiecks liefern

$$a' = \frac{y_3 - y_1}{p}\sqrt{y_2^2 + \frac{p^2}{4}},$$

$$b' = \frac{y_1 - y_2}{p}\sqrt{y_3^2 + \frac{p^2}{4}},$$

$$c' = \frac{y_2 - y_3}{p}\sqrt{y_1^2 + \frac{p^2}{4}}.$$

Die Wurzelgrössen, welche hier auftreten, sind nun, wie man sofort sieht, nichts anders als die zu den Punkten $x_1 y_1$; $x_2 y_2$; $x_3 y_3$ gehörigen Normalen und lassen sich dieselben mit Hülfe der Parameter besagter Punkte, p_1, p_2, p_3 folgendermassen ausdrücken:

$$\sqrt{y_1^2 + \frac{p^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{p p_1},$$

$$\sqrt{y_2^2 + \frac{p^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{p p_2},$$

$$\sqrt{y_3^2 + \frac{p^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{p p_3},$$ sodass also

$$a' = \frac{y_3 - y_1}{2p}\sqrt{p p_1},$$

$$b' = \frac{y_1 - y_2}{2p}\sqrt{p p_2},$$

$$c' = \frac{y_2 - y_3}{2p} \sqrt{p p_3} \text{ wird.}$$

Der Inhalt Δ_t des von den drei Tangenten gebildeten Dreiecks ist nun bekanntermassen (cfr. S.—F. pag. 286 Aufg. 4) gleich der Hälfte des Inhalts des zugehörigen Sehnendreiecks, also $= \frac{1}{4p} (y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$ und durch Einführung dieser Werthe in die zu Anfang dieses Abschnittes gegebene Formel für den Radius des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises ergiebt sich, wenn wir denselben für unser Tangentendreieck mit r bezeichnen,

$$r = \frac{\sqrt{p^3 p_1 p_2 p_3}}{8p^3} \text{ oder } r^2 = \frac{p_1 p_2 p_3}{64 p}.$$

Die Parameter $p_1 p_2 p_3$ müssen wir nun noch durch andere Grössen ersetzen, um die Krümmungshalbmesser in den Ausdruck zu bekommen. Der Parameter irgend eines Parabeldurchmessers ist dem Hauptparameter direkt und dem Quadrat des Sinus des Winkels, welchen seine Ordinaten mit der Hauptaxe bilden, umgekehrt proportional (cfr. S. — F. pag. 270). Bezeichnen wir also die Winkel, welche die in $x_1 y_1$; $x_2 y_2$; $x_3 y_3$ gezogenen Tangenten mit der Hauptaxe bilden, mit $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, so ist offenbar

$$p_1 = \frac{p}{\sin^2 \vartheta_1}, p_2 = \frac{p}{\sin^2 \vartheta_2}, p_3 = \frac{p}{\sin^2 \vartheta_3}.$$

Die Substitution dieser Werthe in unsere Formel liefert dann sofort

$$r = \frac{p}{8 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3}$$

und es lassen sich nun leicht die Krümmungshalbmesser der Berührungspunkte $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ einführen, die zu Folge der oben schon benutzten Formeln

$$\varrho_1 = \frac{p}{2 \sin^3 \vartheta_1}, \varrho_2 = \frac{p}{2 \sin^3 \vartheta_2}, \varrho_3 = \frac{p}{2 \sin^3 \vartheta_3}$$

sind, sodass also durch Cubirung des vorigen Werthes

(II.) $r^3 = \frac{\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3}{64}$ oder $(4r)^3 = \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$ folgt, d. h.

„Der Kubus des vierfachen Radius des Kreises, welcher dem von drei an eine Parabel gezogenen Tangenten gebildeten Dreieck umbeschrieben werden kann, ist gleich dem Produkte der drei Krümmungshalbmesser in den Berührungspunkten der Tangenten."

II.

Wir wollen nun weiter untersuchen, welche Gestalt die Formeln (I) und (II) für die Ellipse annehmen. Wenn wir dabei von der gewöhnlichen Form der Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ausgehen wollten, so würde die Rechnung eine sehr weitläufige werden; wir bestimmen daher die Lage eines Punktes statt durch die beiden Veränderlichen x und y durch eine einzige unabhängige Veränderliche, den sogenannten excentrischen Winkel φ und setzen $y = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$.

Was zunächst das Tangentendreieck betrifft, so sind die Gleichungen der an die Ellipse in den Punkten α, β, γ gezogenen Tangenten folgende:

$$\frac{x}{a} \cos \alpha + \frac{y}{b} \sin \alpha = 1,$$

$$\frac{x}{a} \cos \beta + \frac{y}{b} \sin \beta = 1,$$

$$\frac{x}{a} \cos \gamma + \frac{y}{b} \sin \gamma = 1.$$

Aus diesen drei Gleichungen ergeben sich als Werthe der Coordinaten $x_1 y_1$; $x_2 y_2$; $x_3 y_3$ der Durchschnittspunkte der drei Tangenten

$$x_1 = \frac{a(\sin \alpha - \sin \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}, \quad y_1 = \frac{b(\cos \beta - \cos \alpha)}{\sin(\alpha - \beta)},$$

$$x_2 = \frac{a(\sin\beta - \sin\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)}, \; y_2 = \frac{b(\cos\gamma - \cos\beta}{\sin(\beta-\gamma)},$$
$$x_3 = \frac{a(\sin\gamma - \sin\alpha)}{\sin(\gamma-\alpha)}, \; y_3 = \frac{b(\cos\alpha - \cos\gamma)}{\sin(\gamma-\alpha)}.$$

Bezeichnet man in dem von den drei Tangenten gebildeten Dreieck die Seiten mit t_1, t_2, t_3, so lassen sich dieselben mit Hülfe ihrer Endcoordinaten bestimmen. Nach Ausführung einer ziemlich weitläufigen Rechnung ergiebt sich zunächst

$$t_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta).\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)} \sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$$

$$t_2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma).\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} \sqrt{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}$$

$$t_3 = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma).\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)} \sqrt{a^2\sin^2\gamma + b^2\cos^2\gamma}.$$

Drückt man die Längen zweier conjugirter Halbmesser a' und b' in Funktion des mit α bezeichneten excentrischen Winkels aus, so ergeben sich für die Quadrate derselben

$a'^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha$

$b'^2 = a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha$ (cfr. S.—F. pag. 295 Aufg. 1),

und man erkennt daraus, dass die in den Ausdrücken für t_1, t_2, t_3 auftretenden Wurzelgrössen die zu den in α, β, γ gezogenen Durchmessern a', a'', a''' conjugirten Halbmesser sind. Bezeichnen wir dieselben mit b', b'', b''', so erhalten wir

$$t_1 = b' \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta).\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)},$$

$$t_2 = b'' \frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma).\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)},$$

$$t_3 = b''' \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha).\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}.$$

Der Inhalt Δ_t des von drei Tangenten gebildeten Dreiecks ergiebt sich durch Substitution der oben aufgeführten Eckenkoordinaten in die allgemeine Formel für den Inhalt eines Dreiecks und man findet dann

$$\Delta_t = ab \tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta).\tan\frac{1}{2}(\beta-\gamma).\tan\frac{1}{2}(\gamma-\alpha).$$

Daher ist der Radius r des dem Tangentendreieck umbeschriebenen Kreises

$$r = \frac{b'\,b''\,b'''}{4\,ab\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}.$$

Für die Ellipse ist nun der Krümmungshalbmesser $\varrho = \frac{b'^3}{ab}$ (cfr. S.—F. pag. 319), wo b' der Halbmesser ist, welcher demjenigen des betrachteten Punktes conjugirt ist. Demnach ist r^3, wenn wir Krümmungshalbmesser einführen

$$\text{(III.)}\quad r^3 = \frac{\varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3}{64\cos^3\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos^3\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\cos^3\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}.$$

Die entsprechende Formel für den Radius des dem Sehnendreieck umbeschriebenen Kreises ergiebt sich auf folgende Weise. Die Länge einer Ellipsensehne, welche die durch die Coordinaten α und β gegebenen Punkte verbindet, ist, falls dieselbe mit S bezeichnet wird

$$S = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sqrt{a^2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+b^2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

welcher Werth sich ergiebt, wenn man in die allgemeine Formel $s = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ die Werthe $x_1 = a \cos \alpha$, $y_1 = b \sin \alpha$, $x_2 = a \cos \beta$, $y_2 = b \sin \beta$ einsetzt. Die mit dem Wurzelzeichen behaftete Grösse repräsentirt nun die Länge des dem Punkte $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ conjugirten Halbdurchmessers und ausserdem ist die Tangente im Punkte $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ parallel der die Punkte α und β verbindenden Sehne; wenn also b' die Länge des zur gegebenen Sehne parallelen Halbdurchmessers ist, so ist

$$S = 2 b' \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Nun ist $R = \frac{S_1 S_2 S_3}{4 \Delta_S}$

$$R = \frac{8 b' b'' b''' \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)}{8 a b \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)} \text{ oder}$$

$$R = \frac{b' b'' b'''}{a b},$$

da der Inhalt Δ_S des Sehnendreiecks gleich

$$\Delta_S = 2 a b \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$$

ist, wie sich sehr leicht beweisen lässt. Die Einführung der Krümmungshalbmesser liefert dann einen Werth von der Form

$$\text{(IV.)} \quad R^3 = \varrho_p \cdot \varrho_k \cdot \varrho_l,$$

wo ϱ_p, ϱ_k, ϱ_l die Krümmungshalbmesser in den Punkten sind, in denen die die Seiten des Sehnendreiecks halbirenden Durchmesser die Curve treffen. Rückt der Mittelpunkt der Ellipse in's Unendliche, so werden alle Durchmesser parallel, und wir kommen dadurch wieder auf den schon behandelten Fall der Parabel.

III.

Wenn wir dieselben Untersuchungen für die Hyperbel anstellen, so wird sich ergeben, dass ebenso wie bei der Parabel und Ellipse die Radien der Kreise, welche einem Sehnen- und Tangentendreieck umbeschrieben werden können, sich als Funktionen gewisser Krümmungshalbmesser bestimmen lassen. Auch in diesem Falle wollen wir nicht von der gewöhnlichen Form der Gleichung der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ausgehen, sondern die Lage der drei Punkte $x_1 y_1$; $x_2 y_2$; $x_3 y_3$ mit Hülfe des excentrischen Winkels bestimmen und setzen:

$$x = a.\, sec\, \varphi\,,\quad y = b\, tan\, \varphi.$$

Die Gleichung der im Punkte φ an die Hyperbel gezogenen Tangente ist dann

$$\frac{x}{a}\, sec\, \varphi - \frac{y}{b}\, tan\, \varphi = 1$$

und es ergeben sich daher die Coordinaten $X_1\, Y_1$; $X_2\, Y_2$; $X_3\, Y_3$ der Durchschnittspunkte der in den Punkten α, β, γ an die Curve gezogenen Tangenten aus den drei Gleichungen

$$\frac{x}{a}\, sec\, \alpha - \frac{y}{b}\, tan\, \alpha = 1$$

$$\frac{x}{a}\, sec\, \beta - \frac{y}{b}\, tan\, \beta = 1$$

$$\frac{x}{a}\, sec\, \gamma - \frac{y}{b}\, tan\, \gamma = 1\,,\ \text{wie folgt:}$$

$$X_1 = a\, \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}\,,\quad Y_1 = b\, tan\, \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$X_2 = a\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)},\quad Y_2 = b\tan\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$$

$$X_3 = a\frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)},\quad Y_3 = b\tan\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$

Aus diesen Eckenkoordinaten des Tangentendreiecks lassen sich nun die Seiten desselben t_1, t_2, t_3 berechnen. Es ergeben sich folgende Werthe:

$$t_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}\beta+\gamma)}\sqrt{b^2+a^2\sin^2\beta},$$

$$t_2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}\sqrt{b^2+a^2\sin^2\alpha},$$

$$t_3 = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}\sqrt{b^2+a^2\sin^2\gamma}.$$

Berechnet man sich die Längen zweier conjugirter Halbmesser, welche mit a' und b' bezeichnet werden mögen, so findet man

$$a'^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi}(a^2+b^2\sin^2\varphi)$$

$$b'^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi}(b^2+a^2\sin^2\varphi).$$

Unter Berücksichtigung dieser Werthe verwandeln sich nun unsere Ausdrücke für t_1, t_2, t_3 in

$$t_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha).\cos\beta}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}\,b'$$

$$t_2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma).\cos\alpha}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}\,b''$$

$$t_3 = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta).\cos\gamma}{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma).\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}\,b'''.$$

wo b', b'', b''' die Halbmesser sind, welche den durch α, β, γ gezogenen conjugirt sind. Der Inhalt des von drei Tangenten gebildeten Dreiecks ergiebt sich, indem wir in die allgemeine Formel die oben berechneten Coordinaten der Ecken einsetzen, und liefert diese Substitution noch mancherlei Vereinfachungen

$$\Delta_1 = \frac{a\,b\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma).\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma).\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)},$$

und somit haben wir für den Radius r des dem Tangentendreieck umbeschriebenen Kreises

$$r = \frac{b'\,b''\,b'''\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma}{4\,a\,b\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}.$$

Die Berechnung des Krümmungshalbmessers der Hyperbel aus der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ liefert

$$\varrho = \frac{\sqrt{(a^4y^2+b^4x^2)^3}}{a^4b^4} = \frac{\sqrt{(a^2\tan^2\alpha+b^2\sec^2\alpha)^3}}{a\,b}.$$

Der Ausdruck in der Klammer ist nun aber das Quadrat des Halbmessers, welcher dem durch α gezogenen conjugirt ist. Wird derselbe mit b' bezeichnet, so ist

$$\varrho = \frac{\sqrt{b'^6}}{ab} = \frac{b'^3}{ab}.$$

Demnach ist der Krümmungshalbmesser der Hyperbel gleich dem Cubus des conjugirten Halbmessers dividirt durch das Produkt der Halbaxen. Bezeichnen also b', b'', b''' die Halbmesser, welche den durch α, β, γ gezogenen conjugirt sind und ϱ_1 ϱ_2, ϱ_3 die Krümmungshalbmesser dieser Punkte, so ist

$$\varrho_1 = \frac{b'^3}{ab},\ \varrho_2 = \frac{b''^3}{ab},\ \varrho_3 = \frac{b'''^3}{ab}.$$

Die Substitution dieser Werthe in unsere auf die dritte Potenz erhobene Formel liefert dann

$$\text{(V.)}\quad r^3 = \frac{\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \cos^3\alpha \cos^3\beta \cos^3\gamma}{64 \cos^3\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos^3\frac{1}{2}(\beta+\gamma) \cos^3\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}.$$

Es erübrigt noch, den Radius des einem Sehnendreieck der Hyperbel umschriebenen Kreises zu bestimmen. Der Inhalt des Sehnendreiecks mit den Ecken α, β, γ ist

$$\Delta_S = 2ab \sin \frac{\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma) \sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\cos\alpha \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma}.$$

Für die Längen der Hyperbelsehnen ergiebt sich in einfacher Weise

$$s_1 = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \,.\, \cos\beta} \sqrt{a^2 \sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta) + b^2 \cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)},$$

$$s_2 = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\beta \,.\, \cos\gamma} \sqrt{a^2 \sin^2\frac{1}{2}(\beta+\gamma) + b^2 \cos^2\frac{1}{2}(\beta-\gamma)},$$

$$s_3 = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma \,.\, \cos\alpha}\sqrt{a^2\sin^2\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)+b^2\cos^2\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}.$$

Nun käme es noch darauf an, die Bedeutung der Wurzelgrössen in diesen Ausdrücken zu bestimmen. Dazu können wir auf folgende Weise gelangen. Die Coordinaten des Halbirungspunktes einer durch die Punkte φ_1 und φ_2 gelegten Hyperbelsehne sind

$$\frac{a(sec\,\varphi_1+sec\,\varphi_2)}{2},\quad \frac{b(tan\,\varphi_1+tan\,\varphi_2)}{2}.$$

Zieht man vom Centrum eine Gerade nach diesem Punkte, so hat diese die Gleichung

$$y = lx.$$

Setzen wir die Coordinaten des Halbirungspunktes ein, so ergiebt sich

$$l = \frac{b}{a}\cdot\frac{tan\,\varphi_1+tan\,\varphi_2}{sec\,\varphi_1+sec\,\varphi_2} = \frac{b}{a}\cdot\frac{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}{\cos\varphi_1+\cos\varphi_2}.$$

Wenn die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden $y = lx$ und der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ bestimmt werden sollen, so finden wir dieselben durch die Bemerkung, dass die Coordinaten der Geraden der Gleichung der Hyberbel genügen müssen. Durch Elimination des x oder y aus beiden Gleichungen folgt

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{l^2x^2}{b^2}=1 \text{ und}$$

$$\frac{y^2}{l^2a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

und wenn wir hier den für l gefundenen Werth einsetzen, so erhalten wir

$$x^2 = \frac{a^2\cos^2\frac{1}{2}(\varphi^1-\varphi^2)}{\cos\varphi^1\,.\,\cos\varphi^2},$$

$$y^2 = \frac{b^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2}.$$

Für den durch besagten Hyperbelpunkt gehenden Durchmesser a' erhalten wir nun

$$a'^2 = \frac{a^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + b^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2}$$

und für den diesem conjugirten Durchmesser

$$b'^2 = \frac{a^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + b^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2}.$$

Setzen wir nun $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$, so verwandelt sich der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in unserer Formel für s_1, wenn noch $\sqrt{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$ unter das Wurzelzeichen geschafft wird, in

$$s_1 = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sqrt{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} b'. \quad \text{Ebenso finden wir}$$

$$s_2 = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\sqrt{\cos\beta \cdot \cos\gamma}} b'',$$

$$s_3 = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)}{\sqrt{\cos\gamma \cdot \cos\alpha}} b''',$$

wenn b', b'', b''' die Durchmesser sind, welche den die Sehnen halbirenden conjugirt sind. Die Substitution dieser Werthe in die Formel für R liefert

$$R = \frac{b' b'' b'''}{ab} \text{ oder}$$

$$\text{(VI.)} \quad R^3 = \varrho_p \cdot \varrho_k \cdot \varrho_l,$$

wo ϱ_p, ϱ_k, ϱ_l die Krümmungshalbmesser in den Punkten der Hyperbel sind, welche als die Schnittpunkte der Verbindungslinien der Halbirungspunkte der drei Hyperbelsehnen mit dem Centrum und der Curve erhalten werden.

Aus den Formeln I bis VI ist ersichtlich, dass es bei den Kegelschnitten immer möglich ist, die Radien der den Tangenten- resp. Sehnendreiecken umbeschriebenen Kreise als Funktionen gewisser durch das Dreieck bestimmter Krümmungshalbmesser zu bestimmen. Ferner folgt aus den Formeln (I), (IV) und (VI), dass allgemein der Satz gilt:

„Für jeden Kegelschnitt ist der Cubus des Radius desjenigen Kreises, welcher einem Sehnendreieck umschrieben werden kann, gleich dem Produkt der drei Krümmungshalbmesser in den Endpunkten der Durchmesser, welche die Dreiecksseiten halbiren."

IV.

Die Formeln für die Radien der den Tangenten- und Sehnendreiecken eines Kegelschnitts umbeschriebenen Kreise können nun benutzt werden, um auf sehr einfache Weise eine Reihe von Sätzen abzuleiten, welche über Krümmungshalbmesser bei Kegelschnitten existiren. Wir wollen dies zunächst bei der Parabel thun. Um zum Ziele zu gelangen, wollen wir uns vorstellen, dass zwei von den Punkten $x_1\,y_1$; $x_2\,y_2$; $x_3\,y_3$, in denen Tangenten an eine Parabel gezogen sind, sehr nahe zusammen gelegen seien. Dann wird die dritte Seite des Tangentendreiecks, also der Abschnitt, den die beiden in $x_1\,y_1$ und $x_2\,y_2$ gezogenen Tangenten auf der Tangente in $x_3\,y_3$ abschneiden, sehr klein werden. Nehmen wir nun an, der Punkt $x_2\,y_2$ nähere sich mehr und mehr dem Punkte $x_1\,y_1$ und falle endlich mit ihm zusammen, so wird die dritte Dreiecksseite unendlich klein werden, sie wird dargestellt werden durch den Punkt, in welchem die beiden Tangenten in $x_1\,y_1$ und $x_2\,y_2$, welche in eine einzige zusammengefallen sind, die Tangente in $x_3\,y_3$ schneiden. Es

fragt sich nun, was dabei aus dem Radius r wird. Offenbar verwandelt sich derselbe in einen Radius, dessen Länge gefunden wird, wenn man auf der Tangente in $x_1 y_1$ im Halbirungspunkte, also in dem in der Figur I angedeuteten Punkte R und ebenso auf der Tangente in $x_3 y_3$ im Schnittpunkte I mit der Tangente in $x_1 y_1$ Lothe errichtet. Beide Lothe werden sich in einem Punkte B schneiden, welcher der Mittelpunkt des fraglichen Kreises ist. $\overline{IB}$ ist der gesuchte Radius. Wenn wir also lim $r^3 = r_1^3$ setzen, so ist

$$r_1^3 = \frac{\varrho_1^2 \varrho_3}{64}.$$

Denken wir uns nun weiter, dass der Punkt $x_2 y_2$ dem Punkte $x_3 y_3$ sehr nahe gelegen sei und ihm sich unendlich nähere, dann können wir beim Uebergange zur Grenze ganz dieselben Schlüsse, wie eben, anwenden. Wir müssen in R_1, dem Halbirungspunkt der Tangente $\overline{IP_3}$, auf dieser Tangente und auf IP_1 in I Lothe errichten. Beide schneiden sich in B_1 und IB_1 ist dann wieder der gesuchte Radius. Setzen wir nun lim $r^3 = r_3^3$, so ergiebt sich

$$r_3^3 = \frac{\varrho_1 \varrho_3^2}{64},$$

und die Division beider Gleichungen liefert

$$\varrho_1 : \varrho_3 = r_1^3 : r_3^3.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke IBR und $IB_1 R_1$ folgt nun die Proportionalität der entsprechenden Seiten. Wenn wir also die Stücke der Tangenten zwischen dem Durchschnittspunkt und den Berührungspunkten mit t_1 und t_3 bezeichnen, so gilt die Proportion

$$r_1 : r_3 = t_1 : t_3$$

und die Substitution dieses Werthes in die vorhergehende Gleichung liefert

$$\varrho_1 : \varrho_3 = t_1^3 : t_3^3.$$

„Das Verhältniss zweier Krümmungshalbmesser einer Parabel

ist gleich dem Cubus des Verhältnisses der bis zum Durchschnitt verlängerten Tangenten."

Wir wollen uns nun dazu wenden, dieselben Betrachtungen für die Ellipse anzustellen und können uns dabei kürzer fassen, da die Schlussweise ganz dieselbe bleibt wie bei der Parabel. Der Radius des einem Tangentendreieck umschriebenen Kreises war bestimmt durch die Formel

$$r^3 = \frac{\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3}{64 \cos^3 \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \cos^3 \frac{1}{2}(\beta-\gamma) \cos^3 \frac{1}{2}(\gamma-\varrho)}.$$

Lassen wir nun zwei der Punkte α, β, γ sich einander unendlich nähern und endlich zusammenfallen, so gehen die Tangenten in eine einzige über; es wird $\alpha - \beta = 0$ oder $\alpha = \beta$. Die Folge davon ist, dass $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 1$ wird und $\cos \frac{1}{2}(\beta-\gamma) . \cos \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$ sich in $\cos^2 \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$ verwandelt. Beim Uebergange zur Grenze erhalten wir also, wenn wie vorher $\lim r^3 = r_1^3$ gesetzt wird,

$$r_1^3 = \frac{\varrho_1^2 \varrho_3}{64 \cos^6 \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}.$$

Nehmen wir ferner an, die Tangenten in β und γ fielen zusammen, so wird $\beta - \gamma = 0$. In Folge hiervon wird $\cos \frac{1}{2}(\beta-\gamma) = 1$ und $\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \cos \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$ gleich $\cos^2 \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$. Setzen wir also $\lim r^3 = r_3^3$, so ist

$$r_3^3 = \frac{\varrho_1 \varrho_3^2}{64 \cos^6 \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}.$$

Die Division beider Gleichungen ergiebt dann

$$r_1^3 : r_3^3 = \varrho_1 : \varrho_3$$

und wenn wir nun dieselbe Construction wie oben bei der

Parabel ausführen und die zwischen dem Durchschnittspunkt und den Berührungspunkten zweier Tangenten liegenden Stücke derselben mit t_1 und t_3 bezeichnen, so folgt

$$r_1^3 : r_3^3 = t_1^3 : t_3^3$$
$$\varrho_1 : \varrho_3 = t_1^3 : t_3^3 \text{ d. h.}$$

„das Verhältniss zweier Krümmungshalbmesser einer Ellipse ist gleich dem Cubus des Verhältnisses der bis zum Durchschnitt verlängerten Tangenten."

Dass dieser Satz auch für die Hyperbel gelten muss, wird sich sofort ergeben. Behalten wir die oben gebrauchte Bezeichnungsweise bei, so erhalten wir beim Uebergange zur Grenze das eine Mal

$$r_1^3 = \frac{\varrho_1^2 \varrho_3 \cos^3\alpha \,.\, \cos^3\gamma}{64 \cos^6 \frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}$$

und das andere Mal

$$r_3^3 = \frac{\varrho_1 \varrho_3^2 \cos^3\alpha \,.\, \cos^3\gamma}{64 \cos^6 \frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}.$$

Die Division beider Resultate liefert die Proportion

$$\varrho_1 : \varrho_3 = r_1^3 : r_3^3,$$

welche unsere Behauptung enthält.

V.

Aus dem vorhergehenden Abschnitt ist ersichtlich, dass der Satz gilt: „(1) Für jeden Kegelschnitt ist das Verhältniss zweier Krümmungshalbmesser gleich dem Cubus des Verhältnisses der bis zum Durchschnitt verlängerten Tanganten." Von diesem Satze wollen wir nun ausgehen, um weitere Sätze über die Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte abzuleiten. Zu dem Ende wollen wir zunächst einen Satz beweisen, welcher für die Normalen und Tangenten eines Kegelschnitts gilt. Nehmen wir an, es sei die Glei-

chung einer beliebigen ebenen auf ein rechtwinkliges Axensystem bezogenen Curve gegeben durch $y=f(x)$. An diese Curve seien in den Punkten $P_0=(x_0, y_0)$ und $P_1=(x_1, y_1)$ Tangenten gezogen, welche sich im Punkte $P=(\xi, \eta)$ schneiden. Bezeichnet man die Winkel, welche die Tangenten mit der Abscissenaxe bilden, mit φ_0 und φ_1, die Stücke der Tangenten vom Berührungspunkt bis zum Durchschnittspunkt mit t_0 und t_1 und die Normalen in P_0 und P_1 mit n_0 und n_1, so ist offenbar

$$n_0=\frac{y_0}{\cos\varphi_0},\ t_0=\frac{\eta-y_0}{\sin\varphi_0}$$

$$n_1=\frac{y_1}{\cos\varphi_1},\ t_1=\frac{y_1-\eta}{\sin\varphi_1}.$$

Wir wollen nun den Quotienten $\frac{n_0 t_1}{n_1 t_0}$ bilden. Es wird sich nachweisen lassen, dass derselbe für die Kegelschnitte den Werth 1 besitzt.

$$\frac{n_0 t_1}{n_1 t_0}=\frac{y_0\cos\varphi_1(y_1-\eta)\sin\varphi_0}{y_1\cos\varphi_0(\eta-y_0)\sin\varphi_1}=\frac{y_0 y_0'(y_1-\eta)}{y_1 y_1'(\eta-y_0)}$$

$$\text{da}\ \frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0}=tan\,\varphi_0=y_0',\ \frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}=tan\,\varphi_1=y_1'\ \text{ist.}$$

Berechnen wir nun die Coodinaten des Durchschnittspunktes aus den Gleichungen der Tangenten

$$\eta-y_0=(\xi-x_0)\,y_0'$$
$$\eta-y_1=(\xi-x_1)\,y_1',$$

so ergiebt sich

$$\eta=\frac{(x_0-x_1)\,y_0'\,y_1'-(y_0\,y_1'-y_1\,y_0')}{y_0'-y_1'}$$

$$\eta-y_0=\frac{(x_0-x_1)\,y_0'\,y_1'-(y_0-y_1)\,y_0'}{y_0'-y_1'}$$

$$y_1-\eta=\frac{(y_0-y_1)\,y_1'-(x_0-x_1)\,y_0'\,y_1'}{y_0'-y_1'}.$$

Die Substitution dieser Werthe liefert nach einigen Umformungen

$$\frac{n_0 t_1}{n_1 t_0} = \frac{y_0^2 - y_0 y_1 - (x_0 - x_1) y_0 y_0'}{(x_0 - x_1) y_1 y_1' - y_0 y_1 + y_1^2}.$$

Führen wir in diese Gleichung die aus $y_0^2 = 2px_0 + qx_0^2$ und $y_1^2 = 2px_1 + qx_1^2$ gefundenen Werthe $y_0 y_0' = p + qx_0$, $y_1 y_1 = p + 9x_1$, so ergiebt sich

$$\frac{n_0 t_1}{n_1 t_0} = 1 \text{ oder}$$

$$n_0 : n_1 = t_0 : t_1 \text{ d. h.}$$

„in jedem Kegelschnitt verhalten sich die Normalen, wie die bis zum Durchschnitt verlängerten Tangenten." Die Verbindung dieses Satzes mit dem zu Anfang dieses Abschnittes stehenden liefert für die Krümmungshalbmesser den Satz: (2) „In jedem Kegelschnitt ist das Verhältniss zweier Krümmungshalbmester gleich dem Cubus des Verhältnisses der Normalen." Die Sätze (1) und (2) gelten für alle Kegelschnitte. Für die Ellipse und Hyperbel gilt nun der Satz: „das Rechteck aus der Normale und der Senkrechten vom Centrum auf die Tangente ist constant und gleich dem Quadrat über der halben kleinen Axe."

Bezeichnen wir also zwei Normalen mit n_0 und n_1 und die Lothe vom Centrum auf die Tangenten mit p_0 und p_1, so gilt die Gleichung $n_0 p_0 = n_1 p_1$

$$n_0 : n_1 = p_1 : p_0.$$

Diese Proportion enthält den Satz: „Die Normalen einer Ellipse oder Hyperbel verhalten sich umgekehrt wie die vom Centrum auf die Tangenten gefällten Lothe," und die Verbindung dieses Satzes mit Satz (2) dieses Abschnittes liefert für die Krümmungshalbmesser den Satz: (1) „Das Verhältniss zweier Krümmungshalbmesser einer Ellipse oder Hyperbel ist gleich dem Cubus des umgekehrten Verhältnisses der vom Centrum auf die Tangenten gefällten Lothe."

$$\varrho_0 : \varrho_1 = p_1^3 : p_0^3.$$

Für Ellipse und Hyperbel gilt ferner der Satz, dass das Rechteck aus den von den Brennpunkten auf die Tangente gefällten Lothen constant und gleich dem Quadrate über der halben kleinen Axe ist. Nach den Bezeichnungen der Figur II. ist also

$$\overline{FT}.\ \overline{F_1T_1}=b^2 \text{ und ebenso } \overline{Ft}.\ \overline{F_1t_1}=b^2.$$

Aus beiden Gleichungen folgt sofort

$$\frac{FT}{Ft}=\frac{F_1t_1}{F_1T_1}.$$

Nun ist aber $\frac{FT}{Ft}$ das Verhältniss der Sinus der Theile, in welche die Linie FP den Winkel theilt, welchen die beiden von P aus an die Curve gezogenen Tangenten einschliessen, und $\frac{F_1t_1}{F_1T_1}$ ist das Verhältniss der Sinus der Theile, in welche F_1P denselben Winkel theilt; daher ist $\sphericalangle TPF=\sphericalangle t_1PF_1$. Da nun weiter die beiden Dreiecke TFP und T_1F_1P ähnlich sind, weil sie in den Winkeln übereinstimmen, so gilt die Proportion

$$TP:t_1P=FP:F_1P \text{ d. h}$$

„zieht man an eine Ellipse oder Hyperbel von einem Punkte P zwei Tangenten, so verhalten sich dieselben wie die Verbindungslinien der beiden Brennpunkte mit dem Punkte P.“

Die Verbindung der beiden Gleichungen

$$TP:t_1P=TP:F_1P \text{ und}$$

$$\varrho_1:\varrho_2=\overline{TP}^3:\overline{t_1P}^3$$

liefert für die Krümmungshalbmesser den neuen Satz: „(2) Zieht man an eine Ellipse oder Hyperbel von einem Punkte zwei Tangenten, so ist das Verhältniss der Krümmungshalbmesser der Berührungspunkte gleich dem Cubus des Verhältnisses der Verbindungslinien des Schnittpunktes der beiden Tangenten mit den Brennpunkten.“

Wie man sofort einsieht, gilt auch der Satz: „(3) Das Verhältniss zweier Krümmungshalbmesser einer Ellipse oder

Hyperbel ist gleich dem Cubus des Verhältnisses der Lothe, welche vom nächsten Brennpunkt auf die Tangenten der betrachteten Punkte gefällt sind."

In ähnlicher Weise lassen sich nun auch Sätze ableiten, welche speciell für die Parabel gelten. Bei der Parabel ist bekanntlich das vom Brennpunkt auf die Tangente gefällte Loth gleich der halben Normale. Bezeichnen wir also zwei Normalen der Parabel mit n_0 und n_1 und die vom Brennpunkt auf die zugehörigen Tangenten gefällten Lothe mit p_0 und p_1, so gilt die Proportion $n_0 : n_1 = p_0 : p_1$ und also auch

$$\varrho_0 : \varrho_1 = p_0^3 : p_1^3 \text{ d. h.}$$

(1) „das Verhältniss zweier Krümmungshalbmesser der Parabel ist gleich dem Cubus des Verhältnisses der vom Brennpunkt auf die Tangenten gefällten Lothe."

Wie bereits im ersten Abschnitte erwähnt wurde, ist die Normale einer Parabel $n = \frac{1}{2}\sqrt{p\,p_1}$, wo p_1 der Parameter des Durchmessers ist, welcher die Curve in dem betrachteten Punkt schneidet. Zwei Normalen der Parabel verhalten sich demnach wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen Parametern, und wir haben also für die Krümmungshalbmesser den Satz: „(2) Das Verhältniss zweier Krümmungshalbmesser einer Parabel ist gleich der Quadratwurzel aus dem Cubus des Verhältnisses der zugehörigen Parameter. Bei der Parabel gilt ferner der Satz, dass der Parameter irgend eines Durchmessers gleich ist der vierfachen Entfernung seines Endpunktes vom Brennpunkt (cfr. S.-F. pag. 272). Bezeichnen wir also die Parameter irgend zweier Durchmesser mit p_0 und p_1 und die Entfernungen der Endpunkte besagter Durchmesser vom Brennpunkt mit m_0 und m_1, so gilt die Proportion $p_0 : p_1 = m_0 : m_1$ d. h. „die Parameter zweier Durchmesser verhalten sich wie die Entfernungen ihrer Endpunkte vom Brennpunkt," und nun liefert die Verbindung der letzten beiden Sätze den neuen: „(3) Das Verhältniss zweier Krümmungshalbmesser der Pa-

rabel ist gleich der Qradratwurzel aus dem Cubus des Verhältnisses der Entfernungen der betrachteten Punkte vom Brennpunkt."

VI.

Wie wir in den beiden vorhergehenden Abschnitten durch die Annahme, dass eine Ecke des Tangentendreiecks verschwindet, eine Reihe von Sätzen über das Verhältniss zweier Krümmungshalbmesser gefolgert haben, ebenso können wir nun auch zwei Ecken eines Sehnendreiecks zusammenfallen lassen. Wenn wir dabei jedoch annehmen wollten, dass das Sehnendreieck eine ganz beliebige Lage habe, würden wir zu keinen bemerkenswerthen Resultaten gelangen. Nehmen wir aber, um mit der Parabel zu beginnen, an, dass eine der Seiten des Sehnendreiecks auf der Hauptaxe senkrecht steht, während die beiden anderen Seiten eine beliebige Lage haben können und lassen dann den Punkt $x_3 y_3$ sich unendlich dem Punkte $x_2 y_2$ nähern, so wird eine Seite des Dreiecks verschwinden, während die beiden anderen Seiten zusammenfallen. Dies hat dann zur Folge, dass der Radius R des dem Sehnendreieck umbeschriebenen Kreises sich in die Normale verwandelt, oder die Formel $R^3 = \varrho_{12}\varrho_{23}\varrho_{31}$ verwandelt sich in $n_1^3 = \varrho_{12}^2 \varrho_1$. In unserem Falle ist nun ϱ_{12} der Krümmungshalbmesser im Scheitel der Curve, also gleich der Ordinate im Brennpunkte $= p$, wenn die Gleichung der Parabel $y^2 = 2px$ ist.

Demnach ist

$$n_1^3 = \varrho_1 p^2 \text{ d. h.}$$

„der Krümmungshalbmesser ist gleich dem Cubus der Normale dividirt durch das Quadrat der Ordinate im Brennpunkt."

Derselbe Satz gilt auch für Ellipse und Hyperbel, wie sich ohne Schwierigkeit aus unseren Formeln nachweisen lässt.

Für den Radius des einem Sehnendreieck der Ellipse umschriebenen Kreises gilt die Formel

$$R^3 = \varrho_p \cdot \varrho_k \cdot \varrho_l$$

Wählen wir die eine Seite so, dass sie ein Durchmesser der Ellipse wird und lassen dann zwei Ecken des Dreiecks sich einander unendlich nähern, so verschwindet beim Uebergange zur Grenze die dritte Seite und zwei Seiten fallen in einen Durchmesser zusammen. Der Radius R geht dadurch in einen Radius über, dessen Länge gefunden wird, wenn man in der Mitte des Durchmessers und auf der Tangente im Endpunkt desselben Lothe errichtet. Der Durchschnittspunkt beider Lothe ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Bekanntlich ist die Tangente im Endpunkte eines Durchmessers dem conjugirten Durchmesser parallel. Daher ist, wenn ψ den Winkel bezeichnet, den zwei conjugirte Durchmesser einschliessen,

$$R_1 = \frac{MB}{\sin\psi}$$

$$R_3 = \frac{MA}{\sin\psi}.$$

Bei besagtem Grenzenübergang verwandelt sich nun unsere Formel für R^3 das eine Mal in $R_1^3 = \varrho_a^2 \varrho_b$, wenn ϱ_a und ϱ_b die Krümmungshalbmesser in den Endpunkten der conjugirten Durchmesser a und b sind (s. Fig. III) und das andere Mal in $R_3^3 = \varrho_a \varrho_b^2$. Wir haben also

$$R_1^3 = \varrho_a^2 \varrho_b = \frac{\overline{MB}^3}{\sin^3\psi}$$

$$R_3^3 = \varrho_a \varrho_b^2 = \frac{\overline{MA}^3}{\sin^3\psi}.$$

Die Division beider Gleichungen liefert die Proportion:

$$\varrho_a : \varrho_b = \overline{MB}^3 : \overline{MA}^3 \text{ d. h.}$$

„das Verhältniss zweier Krümmungshalbmesser in den Endpunkten conjugirter Durchmesser ist gleich dem Cubus des umgekehrten Verhältnisses der conjugirten Durchmesser.“

Multiplicirt man die beiden obigen Gleichungen und zieht die dritte Wurzel aus, so folgt:

$$\varrho_a \cdot \varrho_b = \frac{\overline{MB}.\overline{MA}}{\sin^2\psi}$$

und nun liefert die Multiplication der beiden zuletzt gefundenen Gleichungen

$$\varrho_a^2 = \frac{\overline{MB}^4}{\overline{MA}^2 \sin\psi^2} \text{ oder } \varrho_a = \frac{\overline{MB}^2}{\overline{MA}\sin\psi},$$

eine Formel, welche eine äusserst einfache und schöne Art der Construction des Krümmungshalbmessers giebt. Fällt man nämlich (siehe Fig. IV) von dem betrachteten Punkt des Kegelschnitts ein Loth auf den conjugirten Durchmesser, so ist $\overline{AC}$ offenbar gleich $\overline{AM}\sin\psi$. Beschreibt man nun um A einen Kreis mit $\overline{MB}$, zieht von C aus eine Tangente an denselben und fällt vom Berührungspunkte D ein Loth auf $\overline{AC}$, so wird $\overline{AC}$ von letzterem Lothe im Krümmungsmittelpunkte geschnitten, denn es ist

$$\overline{AD}^2 = \overline{MB}^2 = \overline{AI}.\ \overline{MA}\sin\psi = \varrho.\ \overline{MA}\sin\psi$$

$$\varrho = \frac{\overline{MB}^2}{\overline{MA}\sin\psi}.$$

Dass für die Hyperbel dieselben Sätze in Bezug auf Krümmungshalbmesser in den Endpunkten conjugirter Durchmesser gelten, ist klar, wenn man die conjugirte Hyperbel berücksichtigt. Sind a und b zwei conjugirte Durchmesser und ϱ_a und ϱ_b die Krümmungshalbmesser in den Punkten, wo a die Hyperbel A und b die conjugirte Hyperbel A' trifft, so ist ϱ_b in Bezug auf A und ϱ_a in Bezug auf A' imaginär.

Wie wir eben eine einfache Formel für den Krümmungshalbmesser der Ellipse abgeleitet haben, ebenso lassen sich aus den aufgestellten Proportionen einfache Formeln für den Krümmungshalbmesser ableiten, wenn von den vier auftretenden Grössen je zwei passend gewählt werden, sodass

sie leicht bestimmt werden können. Wir wollen dies jedoch der Kürze halber nur für die Parabel ausführen und dabei die Formel

$$\varrho_1 : \varrho_2 = s_1^3 : s_2^3$$

benutzen, wo s_1 und s_2 die vom Brennpunkt auf die Tangenten gefällten Lothe sind. Wählt man als einen der beiden betrachteten Punkte den Scheitel der Parabel, so ist der Krümmungshalbmesser in diesem Punkte $= p$, der Ordinate im Brennpunkt, und das vom Brennpunkt auf die Scheiteltangente gefällte Loth ist gleich $\frac{p}{2}$. Die Substitution dieser Werthe liefert $\varrho = \frac{8 s^3}{p^2}$, wie es zu erwarten war. Auch den dritten für die Parabel aufgestellten Satz können wir benutzen, um eine einfache Formel für den Krümmungshalbmesser aufzustellen. Nach demselben ist das Verhältniss zweier Krümmungshalbmesser gleich der Quadratwurzel aus dem Cubus des Verhältnisses der Entfernungen der betrachteten Punkte vom Brennpunkt, oder

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^3}$$

Ist die Gleichung der Curxe $y^2 = 2px$, so ist ϱ_2 für $x = \frac{p}{2}$, $y = p$

$$\varrho_2 = \frac{(2p)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{8p^2}$$

und $m_2 = p$. Setzen wir $\varrho_1 = \varrho$, $m_1 = m$, so ist allgemein

$$\varrho = \sqrt{\frac{(2m)^3}{p}}.$$

Zum Schlusse dieses Abschnittes wollen wir noch eine Art der Construction des Krümmungshalbmessers der Parabel anführen, welche zwar nicht mit den abgeleiteten Sätzen im Zusammenhange steht, aber doch hier erwähnt werden soll, weil sie neu sein dürfte. Wählt man die Hauptaxe und die

Tangente im Scheitel zu Coordinatenaxen, so ist der Abschnitt der Normale auf der Abscissenaxe (siehe Fig. V.)

$$\overline{OB} = x + yy',$$

der Abschnitt der Normale auf der Ordinatenaxe

$$\overline{OM} = \frac{x}{y'} + y \text{ also}$$

$$\overline{BM} = \frac{x + yy'}{y'} \sqrt{1 + y'^2}.$$

Setzen wir die Werthe aus der Parabelgleichung $y^2 = 2px$ ein, so folgt

$$\overline{BM} = \frac{x + p}{\sqrt{p}} \sqrt{2x + p}. \text{ Nun ist}$$

$$\varrho = \frac{2x + p}{\sqrt{p}} \sqrt{2x + p}.$$

Die Division beider Gleichungen liefert

$$\frac{\varrho}{\overline{BM}} = \frac{2x + p}{x + p} = \frac{\overline{TB}}{\overline{OB}},$$

wo T der Durchschnittspunkt der Tangente und Abscissenaxe ist.

$$\varrho = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{TB}}{\overline{OB}}$$

Man erhält also den Krümmungshalbmesser irgend eines Punktes P der Parabel, wenn man im Schnittpunkt der in P an die Curve gelegten Tangente mit der Hauptaxe auf der letzteren ein Loth errichtet und die Normale bis zum Durchschnitt I mit diesem Loth verlängert. Dann ist $\overline{IB} = \overline{PR}$ der Krümmungshalbmesser.

VII.

Zeichnet man den Kreis, welcher dem Sehnendreieck einer Parabel umschrieben werden kann, so schneidet derselbe die Curve noch in einem vierten Punkt $x_4 y_4$. Denkt man sich nun die sechs Verbindungslinien zwischen den vier Punkten $x_1 y_1$; $x_2 y_2$; $x_3 y_3$; $x_4 y_4$ gezogen, so hat man vier Dreiecke, für welche der Radius des umbeschriebenen Kreises gleich R ist. Bestimmt man denselben für jedes der Dreiecke nach der im Abschnitt I entwickelten Formel, so erhält man die Werthe

$$R = \sqrt[3]{\varrho_{12}\,\varrho_{23}\,\varrho_{31}},$$

$$R = \sqrt[3]{\varrho_{12}\,\varrho_{14}\,\varrho_{24}},$$

$$R = \sqrt[3]{\varrho_{23}\,\varrho_{24}\,\varrho_{34}},$$

$$R = \sqrt[3]{\varrho_{14}\,\varrho_{13}\,\varrho_{34}}, \text{ oder}$$

$$\varrho_{12}\,\varrho_{23}\,\varrho_{31} = \varrho_{12}\,\varrho_{14}\,\varrho_{24} = \varrho_{23}\,\varrho_{24}\,\varrho_{34} = \varrho_{13}\,\varrho_{14}\,\varrho_{34}.$$

Aus dieser fortlaufenden Gleichung folgt

$$\varrho_{13} = \varrho_{14},$$

$$\varrho_{14} = \varrho_{23},$$

$$\varrho_{12} = \varrho_{34}.$$

Diese drei Gleichungen enthalten den Satz: „Nimmt man auf einer Parabel vier Punkte so an, dass durch dieselben ein Kreis gelegt werden kann, so liegen die Halbirungspunkte je zweier Gegenseiten des vollständigen Vierecks, welches die vier Punkte bestimmen, auf Durchmessern, welche gleich weit von der Hauptaxe entfernt sind.“

Da zwei an eine Parabel gelegte Tangenten sich in dem Durchmesser schneiden, welcher die Verbindungssehne halbirt, so kann man diesen Satz auch in folgender Weise aussprechen:

„Haben eine Parabel und ein Kreis vier Punkte gemeinsam, und zieht man in diesen Punkten Tangenten an die Parabel, so entsteht ein Vierseit, dessen Gegenecken von der Hauptaxe gleich weit entfernt sind.“

Dieser Satz giebt uns ein Mittel in die Hand, die Axe einer Parabel zu finden. Man braucht nur vier Tangenten an die Curve zu ziehen, welche ein Viereck bilden werden und in welchem man die Halbirungspunkte der Diagonalen wird verbinden müssen, um die Richtung der Hauptaxe zu zu erhalten.

Denken wir uns den einem Sehnendreieck der Ellipse umschriebenen Kreis gezeichnet, so wird die Ellipse in einem vierten Punkt geschnitten, und die Verbindungslinien der vier Ellipsenpunkte liefern vier Dreiecke, für deren jedes der Radius des umbeschriebenen Kreises gleich R ist.

$$R^3 = \varrho_{12}\,\varrho_{23}\,\varrho_{31}$$
$$R^3 = \varrho_{12}\,\varrho_{14}\,\varrho_{24}$$
$$R^3 = \varrho_{23}\,\varrho_{24}\,\varrho_{34}$$
$$R^3 = \varrho_{14}\,\varrho_{24}\,\varrho_{34}$$

und aus diesen vier Gleichungen folgt:

$$\varrho_{12} = \varrho_{34}$$
$$\varrho_{13} = \varrho_{24}$$
$$\varrho_{14} = \varrho_{23}$$

Wenn aber zwei Krümmmungshalbmesser einer Ellipse gleich sein sollen (das Vorzeichen kommt hier nicht in Betracht), so ist dies nur möglich, wenn sie die Krümmungshalbmesser in den Endpunkten eines Durchmessers sind oder wenn sie die Krümmungshalbmesser in den Endpunkten solcher Durchmesser sind, die gleiche Länge haben, d. h. die symmetrisch zu den Axen liegen. Wir haben daher folgenden Satz: „Wenn eine Ellipse und ein Kreis vier Punkte gemeinschaftlich haben, so bilden diese vier Punkte ein Viereck, für welches die Halbirungspunkte der Gegenseiten auf Durchmessern liegen, welche symmetrisch zu den Axen sind (siehe Fig. VI.).“ Sehr leicht lässt sich hieraus

auch der Satz ableiten, dass die Verbindungssehnen der Durchschnittspunkte eines Kreises mit der Ellipse gegen die Axen der letzteren gleich geneigt sind, ein Satz, der übrigens für alle Kegelschnitte gilt und sich zur Construction der Krümmungshalbmesser benutzen lässt (cfr. S.-F. pag 307).

Auch noch ein anderer auf die Ellipse bezüglicher Satz lässt sich mit Hülfe unserer Formeln leicht beweisen. Nehmen wir an, es seien auf der Ellipse drei Punkte gegeben, deren Osculationskreise durch einen Punkt gehen, und sowohl die drei Punkte als auch der Durchschnittspunkt der drei Osculationskreise seien auf demselben Kreise gelegen. Die drei Punkte seien bezeichnet mit 1, 2, 3 und der Durchschnittspunkt der drei Osculationskreise sei P. Verbinden wir nun die vier Punkte durch gerade Linien und bestimmen R^3 für die vier entstandenen Dreiecke vermittelst der Krümmungshalbmesser, so erhalten wir die vier Gleichungen

$$R^3 = \varrho_{12}\,\varrho_{23}\,\varrho_{31}$$
$$R^3 = \varrho_{12}\,\varrho_{1P}\,\varrho_{2P}$$
$$R^3 = \varrho_{13}\,\varrho_{1P}\,\varrho_{3P}$$
$$R^3 = \varrho_{23}\,\varrho_{2P}\,\varrho_{3P}$$

Multipliciren wir die letzten drei Gleichungen und dividiren durch die erste, so folgt

$$R^3 = \varrho_{1P}\,\varrho_{2P}\,\varrho_{3P}$$

Andererseits folgt aber aus den letzten drei Gleichungen und der eben gewonnenen

$$\varrho_{12} = \varrho_{3P}$$
$$\varrho_{13} = \varrho_{2P}$$
$$\varrho_{23} = \varrho_{1P}.$$

Da nun der Osculationskreis des Punktes 1, welcher zugleich durch P geht, die Curve in zwei unendlich nahen Punkten trifft, so haben wir durch Verbindung der beiden unendlich nahen Punkte mit P ein Sehnendreieck, für welches die Formel gilt

$$\varrho_1^{\,3} = \varrho_1^{\,2}{}_P\,\varrho_1 \quad \text{oder}$$
$$\varrho_1 = \varrho_{1P}.$$

Durch Betrachtung der übrigen Punkte finden wir auf dieselbe Weise

$$\varrho_2 = \varrho_{2p}$$
$$\varrho_3 = \varrho_{3p}$$

und durch Combination dieser drei Gleichungen mit den drei vorhergehenden folgt dann

$$\varrho_1 = \varrho_{23}$$
$$\varrho_2 = \varrho_{31}$$
$$\varrho_3 = \varrho_{12}$$

ϱ_1 und ϱ_{23}, ϱ_2 und ϱ_{31} und ϱ_3 und ϱ_{12} können daher nur Krümmungshalbmesser in den Endpunkten von Durchmessern sein, und zwar sind dies diejenigen Durchmesser, welche von je einem der Punkte 1, 2, 3 durch den Halbirungspunkt der gegenüberliegenden Dreiecksseite gezogen sind. Da alle Durchmesser der Ellipse durch das Centrum gehen, so sind besagte Durchmesser zu gleicher Zeit die drei sich in einem Punkt schneidenden Mittellinien des Dreiecks. Dieser Punkt ist der Schwerpunkt des Dreiecks. Wir haben daher folgenden Satz:

„Sind auf einer Ellipse vier Punkte so angenommen, dass sie auf einem Kreise liegen, und gehen die Krümmungskreise dreier Punkte zugleich durch den vierten Punkt, so bestimmen die drei Punkte ein Dreieck, dessen Schwerpunkt im Centrum der Curve liegt und dessen Fläche constant ist," einen Satz, der von Joachimsthal zuerst angegeben wurde (cfr. S.-F. Art. 252 Aufg. 1 bis 3).

Fig. I.

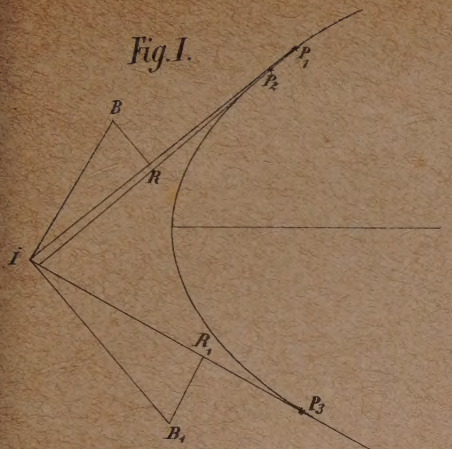

Fig. II.

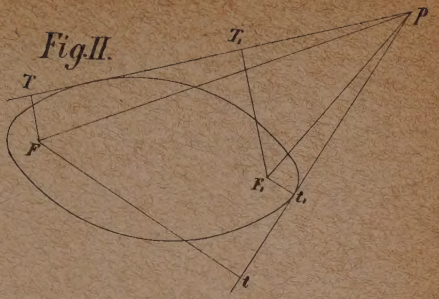

Fig. VI.

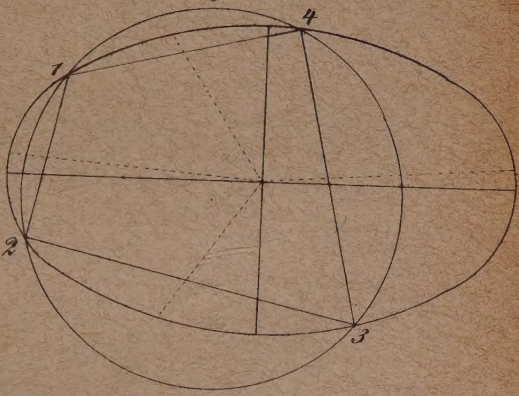

Fig III.

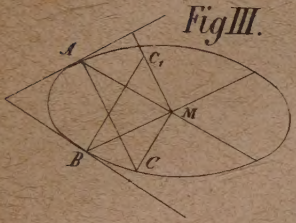

Fig. IV.

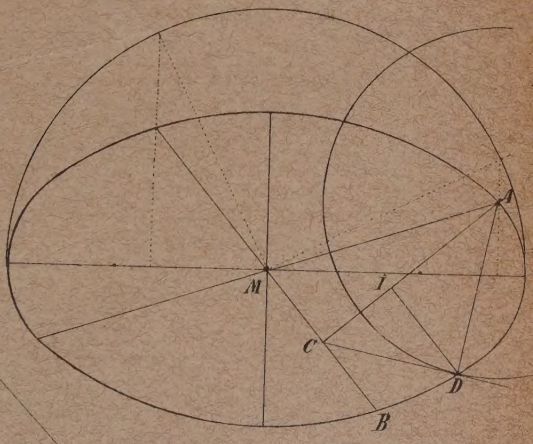
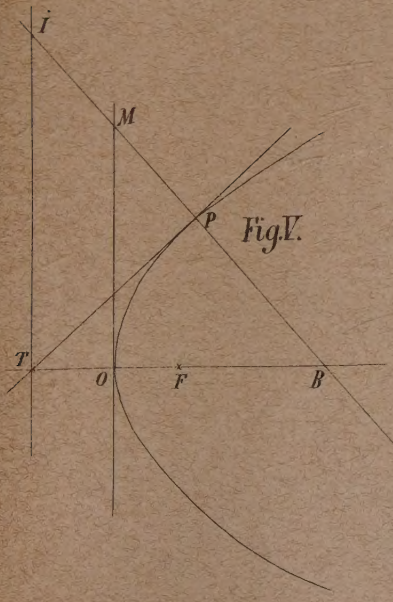
Fig. V.